



Corrigé de l'Examen de rattrapage de physique statistique (L3 PM et PF / (S5 2024)

Exercice n°01 (08)

01- L'espace des phases est de deux dimension ($x, p_x = m\dot{x}$) 0.25

En appliquant le principe fondamental de la dynamique $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ 0.25

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0 \quad 0.25$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad 0.25, \text{ en posant } \omega = \frac{k}{m} \quad 0.25 \text{ l'équation différentielle devient :}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad 0.25$$

On obtient une équation différentielle de deuxième degrés dont la solution est de la forme :

$x = A \sin(\omega t + \varphi)$ 0.25 avec A est l'amplitude de vibration, ω est la pulsation et φ est le déphasage.

$$p_x = m\dot{x} = mA\omega \cos(\omega t + \varphi) \quad 0.25$$

A partir des équation paramétriques de x et de p_x , on peut facilement obtenir l'équation de la trajectoire, comme suit : $\frac{x^2}{A^2} + \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2} = 1$, 0.50 qui est une trajectoire d'une ellipse avec des demi axe a et b dont $a=A$ et $b= Am\omega$ et de centre (0,0). 0.50

02- Surface limitée par cette trajectoire :

La surface d'une ellipse est donnée par la relation suivante ;

$$S = \pi ab = \pi A^2 m \omega \quad 0.50$$

L'énergie classique de l'oscillateur harmonique est :

$$E = E_c + E_p \quad 0.25 \text{ avec } E_p = -\int f_x dx = \int kx dx = \frac{1}{2} kx^2 \quad 0.50 \text{ d'où l'énergie classique est :}$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 = \text{constante} \quad 0.50 \text{ d'où } \frac{dE}{dt} = 0 \quad 0.25$$

03- De l'équation de la trajectoire on obtient la valeur de x :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2} = 1 \quad 0.25 \quad x = A \sqrt{1 - \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2}} \quad 0.25 \text{ par substitution dans l'équation de l'énergie}$$

$$\text{classique on obtient : } E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 \left(1 - \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2} \right) \quad 0.25$$

$$= \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kA^2 \frac{p_x^2}{(Am\omega)^2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} kA \frac{p_x^2}{(m\omega)^2} \text{ et comme } \omega = \frac{k}{m}$$

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} k \frac{p_x^2}{m^2 \omega^2} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} k \frac{p_x^2}{m^2 \frac{k}{m}} = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2} kA^2 - \frac{1}{2} \frac{p_x^2}{m} = \frac{1}{2} kA^2 \quad 0.50 \text{ on avait}$$

déjà : $S = \pi A^2 m \omega$ d'où on en déduit :

$$E = \frac{1}{2} kA^2 = \frac{1}{2} k \frac{S}{\pi m \omega} = \frac{1}{2} k \frac{S}{\pi m} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2} \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\omega}{2\pi} S = vS \quad 01 \text{ avec } v \text{ est la fréquence de vibration.}$$

Exercice 02 (12)

I a- Calcul du volume de l'espace des phases que je note $\Omega(E)$

$\Omega(E) = \int_{\text{contrainte}} d\tau$ 0.50 avec $d\tau$ est le volume infinitésimale de l'espace des phases. On est à trois dimensions ce qui implique que l'espace des phases est à 6 dimensions.

$d\tau = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ 0.50 avec les contraintes suivantes : $0 \leq x \leq L$; $0 \leq y \leq L$ et $0 \leq z \leq L$ et pour

l'énergie on a : $\frac{p^2}{2m} \leq E \Leftrightarrow p^2 \leq 2mE$ 0.50

$$\Omega(E) = \int_{\text{contrainte}} dx dy dz dp_x dp_y dp_z = V \int_{p^2 \leq 2mE} dp_x dp_y dp_z$$

$$\Omega(E) = V \cdot V_{\text{sphère}} \quad 0.50 \quad V_{\text{sphère}} \text{ est le volume d'une sphère de rayon } R = \sqrt{2mE}$$

$$\Omega(E) = V \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = V \cdot \frac{4}{3} \pi (2mE)^{\frac{3}{2}} \quad 0.50 \text{ , Par conséquent le nombre de micro états inférieur à } E \text{ est :}$$

$$\varphi(E) = \frac{\Omega(E)}{h^3} = \frac{V}{h^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2mE)^{\frac{3}{2}} \quad 050 \text{ Le facteur de proportionnalité est } \frac{1}{h^{3N} \cdot 1!} \quad 0.50$$

c- On a le nombre de micro états dont l'énergie est comprise entre E et $E+dE$ est:

$$\Gamma(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE} \delta E = \frac{V}{h^3} \cdot \frac{4}{3} \pi (2m)^{\frac{3}{2}} (E)^{\frac{3}{2}-1} \frac{3}{2} \delta E = \varphi(E) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\delta E}{E} \quad 0.50$$

2°

Considérons un gaz parfait constitué de N particules sans interaction dans une boîte de côté L

$$E = E_c = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} \quad 0.50$$

l'espace des phases est à $6N$ dimensions. Dans le cas de N particules :

$$a- \Omega(E) = \int_{\text{contrainte}} d\tau = \int_{\text{contrainte}} \prod_i^N dx_i dy_i dz_i dp_{xi} dp_{yi} dp_{zi} \quad 0.50$$

$= V^N \int_{p^2 \leq 2mE} \prod_i^N dp_x dp_y dp_z = V^N \cdot V_{SPHERE} \quad 0.50$; V_{SPHERE} est le volume de la sphère de rayon R à $3N$ dimension.

On a le volume d'une sphère de R et de dimension n est donnée par la relation suivante :

$$V = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} R^n ; \text{ nous on est dans le cas d'une sphère de rayon } R = (2mE)^{1/2} \text{ et de dimension } 3N$$

$$V = \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (2mE)^{3N/2} \text{ donc : } \Omega(E) = \frac{\pi^{3N/2}}{(3N/2)!} (2mE)^{3N/2} \cdot V^N \quad 0.50$$

$$\Rightarrow \varphi(E) = \frac{\Omega(E)}{h^{3N} N!} = \frac{\pi^{3N/2} (2mE)^{3N/2} \cdot V^N}{h^{3N} N! (3N/2)!} \quad 0.50 \text{ Avec } N! \text{ est attribué à } N \text{ particules}$$

indiscernables identique.

$$\Gamma(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE} \delta E = \varphi(E) \cdot \frac{3N}{2} \cdot \frac{\delta E}{E} \quad 0.50$$

b- L'entropie du gaz homogène est S : $S = k \log \Gamma(E) \approx k \log \varphi(E)$ 0.50 pour N très grand.

$$S = k \left\{ \frac{3N}{2} \log(2\pi mE) + N \log(V) - 3N \log h - \log N! - \log \frac{3N}{2}! \right\} \quad 0.50 \text{ en appliquant la formule de Stirling on obtient la relation suivante :}$$

$$S_{hom} = k \left\{ \frac{3N}{2} \log(2\pi mE) + N \log(V) - 3N \log h - N \log N + N - \frac{3N}{2} \log \frac{3N}{2} + \frac{3N}{2} \right\} \quad 0.25$$

$$\Gamma(E) = \frac{d\varphi(E)}{dE} \delta E \quad 0.25 \text{ on peut aisément vérifier que } k \log \varphi(E) = k \log \Gamma(E) \quad 0.50$$

$$S_{hom} = k \left\{ \frac{3N}{2} \log(2\pi mE) + N \log(V) - 3N \log h - N \log N + N - \frac{3N}{2} \log \frac{3N}{2} + \frac{3N}{2} \right\}$$

$$= Nk \left\{ \frac{3}{2} \log(2\pi mE) + \log(V) - 3 \log h - \log N + 1 - \frac{3}{2} \log \frac{3N}{2} + \frac{3}{2} \right\}$$

0.50

$$= Nk \left\{ \log \frac{V}{N} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \log \frac{4\pi mE}{3N h^2} \right\} \quad 0.50$$

4° La relation entre la température et l'entropie : on sait que : $\frac{1}{T} = \frac{\partial S_{hom}}{\partial E}$ 0.50 On peut écrire que :

$$S_{hom} = Nk \left\{ \log \frac{V}{N} + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \log \frac{4\pi mE}{3N h^2} \right\} \quad 0.50 = \text{constant} + \frac{3Nk}{2} \log E \quad 0.50 \text{ les}$$

autres termes ne dépendent pas de l'énergie. $\frac{1}{T} = \frac{\partial S_{hom}}{\partial E} = \frac{3Nk}{2} \frac{\partial}{\partial E} (\log E) = \frac{3Nk}{2} \cdot \frac{1}{E} \Rightarrow E = \frac{3}{2} NkT.$

0.50

5° La pression du gaz est : $\frac{P}{T} = \frac{\partial S_{hom}}{\partial V}$ 0.50 Avec dans ce cas ; $S_{hom} = \text{constante} + Nk \log V$

$$\Rightarrow \frac{P}{T} = \frac{Nk}{V} \quad 0.50 \text{ D'où l'équation d'état d'un gaz parfait est } PV = NkT. \quad 0.50$$